A Identidade N

$$n = \sum_{i=0}^{n-1} [1 - (B - 1)i]B^{n-1-i}$$

Dedução:

Considere $A_n = an + b$, e B um número racional qualquer diferente de zero, façamos:

$$A_n = BA_{n-1} - k_{n-1} \quad \therefore \quad k_{n-1} = BA_{n-1} - A_n$$
$$k_n = BA_n - A_{n+1} \quad \rightarrow \quad k_n = B(an + b) - (an + b + a)$$
$$k_n = (B - 1)(an + b) - a$$

Seguindo com a expressão de A_n:

$$A_n = BA_{n-1} - k_{n-1}$$
$$A_{n-1} = BA_{n-2} - k_{n-2}$$
$$A_{n-2} = BA_{n-3} - k_{n-3}$$
$$\vdots$$
$$A_{n-m} = BA_{n-m-1} - k_{n-m-1}$$

Substituindo uma fórmula na outra, observe que:

$$A_n = B^2A_{n-2} - Bk_{n-2} - k_{n-1}$$
$$A_n = B^3A_{n-3} - B^2k_{n-3} - Bk_{n-2} - k_{n-1}$$
$$\vdots$$
$$A_n = B^{m+1}A_{n-m-1} - B^m k_{n-m-1} - B^{m-1}k_{n-m} - B^{m-2}k_{n-m+1} - \ldots - Bk_{n-2} - k_{n-1}$$

$$A_n = B^{m+1}A_{n-m-1} - \sum_{i=0}^{m} B^{m-i}k_{n-m-1+i}$$

Fazendo $m = n - 1$:

$$A_n = B^n A_0 - \sum_{i=0}^{n-1} B^{n-1-i}k_i$$

Substituindo as expressões de A_n, A_0, e k_i na anterior.

$$A_0 = b\ ,\ A_n = an + b,\ k_i = (B - 1)(ai + b) - a$$

$$an + b = B^n b - \sum_{i=0}^{n-1} B^{n-1-i}[(B - 1)(ai + b) - a\ ]$$

Reorganizando os termos.

$$an + b = a\left[\sum_{i=0}^{n-1} B^{n-1-i} - \sum_{i=0}^{n-1} B^{n-1-i}(B - 1)i\right] + b\left[B^n - \sum_{i=0}^{n-1}(B - 1)B^{n-1-i}\right]$$

$$an + b = a\left\{\sum_{i=0}^{n-1}[1 - (B - 1)i]B^{n-1-i}\right\} + b\left[B^n - \sum_{i=0}^{n-1}(B - 1)B^{n-1-i}\right]$$

logo,

$$n = \sum_{i=0}^{n-1}[1 - (B - 1)i]B^{n-1-i} \quad \text{e} \quad 1 = B^n - \sum_{i=0}^{n-1}(B - 1)B^{n-1-i}$$

A segunda equação das anteriores é uma identidade bem conhecida. é simplesmente:

$$B^n - 1 = \sum_{i=0}^{n-1}(B - 1)B^i \quad \text{obtida mudando o índice do somatório.}$$

$n = \sum_{i=0}^{n-1}[1 - (B - 1)i]B^{n-1-i}$, é a identidade que queríamos apresentar, ela funciona qualquer que seja o número racional nâo nulo adotado para B, para todo número natural, está propriedade decorrem das suposições feitas na sua dedução. existe uma outra maneira direta de demonstrar está identidade, fica para os aventureiros descobrir como.

Jhon Hewlly agosto de 2023
jhonhewlly@gmail.com